

پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۱

$$\left(\frac{3-n}{2}, \frac{n+3}{n}\right) = \left(\frac{3}{2} - \frac{n}{2}, 1 + \frac{3}{n}\right)$$

به ازای هر عدد طبیعی n ، ابتدای بازه کوچک تر از $\frac{3}{2}$ و انتهای بازه بزرگ تر از ۱ است؛ بنابراین فقط اعداد ۱ و ۲ می توانند اعداد مورد نظر باشند.

اگر بخواهیم بازه مورد نظر فقط شامل عدد صحیح ۲ باشد، باید $\frac{3-n}{2} \geq 1$ و $\frac{n+3}{n} \leq 3$ باشد که در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{3-n}{2} \geq 1 \Rightarrow 3-n \geq 2 \Rightarrow n \leq 1 \\ \frac{n+3}{n} \leq 3 \xrightarrow[n>0]{n \in \mathbb{N}} n+3 \leq 3n \Rightarrow n \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \emptyset = \text{اشتراک}$$

پس باید بازه مورد نظر فقط شامل عدد صحیح ۱ باشد، در این صورت باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{3-n}{2} \geq 0 \Rightarrow n \leq 3 \\ \frac{n+3}{n} \leq 2 \Rightarrow n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow n = 3 : \text{اشتراک}$$

بنابراین فقط یک عدد طبیعی n در شرایط مسئله صدق می کند.

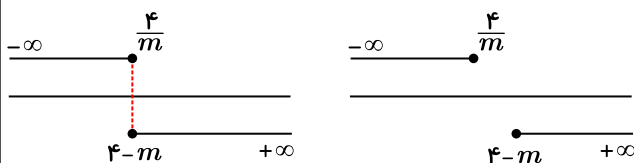
راه دوم: به ازای جای گذاری مقادیر ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ... به جای n مشخص می شود که به ازای $n \geq 4$ امکان پذیر نیست و فقط به ازای $n = 3$ بازه مورد نظر فقط شامل یک عدد صحیح خواهد بود.

۲ گزینه ۲

$$\frac{5}{m+2} \leq \frac{4}{m+1} \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} 5(m+1) \leq 4(m+2)$$

$$\Rightarrow 5m + 5 \leq 4m + 8 \Rightarrow m \leq 3 \Rightarrow m = 1, 2, 3$$

۳ گزینه ۲ طول دو بازه داده شده نامتناهی است؛ به علت خاصیت پیوستگی بازه ها (به عنوان زیرمجموعه هایی از $\mathbb{R}$)، اگر دو بازه بیش از یک نقطه اشتراک داشته باشند، بی نهایت نقطه اشتراک خواهند داشت. بنابراین اشتراک دو بازه باید $\emptyset$ باشد یا دقیقاً یک عضو را شامل شود.



حالت ①: یک نقطه اشتراک

حالت ②: اشتراک تهی

$$\Rightarrow \frac{4}{m} \leq 4-m \Rightarrow m^2 - 4m + 4 \leq 0 \Rightarrow (m-2)^2 \leq 0 \xrightarrow{(m-2)^2 \geq 0} (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

بنابراین به ازای یک مقدار m ، مطلوب مسئله اتفاق می افتد.

۴ گزینه ۱

$$[(A \cap B) - B]' = [(A \cap B) \cap B']' = [A \cap \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset}]' = [A \cap \emptyset]' = \emptyset' = U$$

$$[(A \cap B) \cup (A - B)] = [(A \cap B) \cup (A \cap B')] = [A \cap \underbrace{(B \cup B')}_U] = [A \cap U] = A$$

حال خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$[(A \cap B) - B]' \cap [(A \cap B) \cup (A - B)] = U \cap A = A$$

۵ گزینه ۱

با کمی دقت متوجه می شویم که تعداد نقطه های هر شکل برابر با $[(n+0) + (n+1) + \dots + (n+n-1)]$ می باشد.

..... , $4+5+6+7$: شکل چهارم , $3+4+5$: شکل سوم , $2+3$: شکل دوم , 1 : شکل اول

پس تعداد نقطه ها در شکل نهم می شود:

$$9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 = 117$$

۶ گزینه ۳ تعداد دایره ها با یکدیگر تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۳ می دهند.

$$5, 8, 11, \dots \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} a_{12} = 5 + 11(3) = 5 + 33 = 38$$

۷ گزینه ۴ با فرض $t_n = a \cdot n + b$ داریم:

$$\begin{aligned} t_5 = 8 &\Rightarrow 5a + b = 8 \\ t_{10} = 5 &\Rightarrow 10a + b = 5 \end{aligned} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} -5a - b = -8 \\ 10a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow 5a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow b = 8 - 5a = 8 - 5\left(-\frac{3}{5}\right) \Rightarrow b = 8 + 3 = 11 \Rightarrow t_n = -\frac{3}{5}n + 11$$

$$t_{16} = -\frac{3}{5} \times 16 + 11 = \frac{-48 + 55}{5} = \frac{7}{5} = 1,4$$

۸ گزینه ۱

با استفاده از جمله عمومی دنباله و جمله صدم که برابر با $\frac{k}{m}$ است، جمله ۹۹ و به همین ترتیب جمله ۹۸ را بر حسب m و k به دست می آوریم:

$$a_{100} = \frac{1}{a_{99}} + 1 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{1}{a_{99}} + 1 \Rightarrow \frac{1}{a_{99}} = \frac{k}{m} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{99}} = \frac{k-m}{m} \Rightarrow a_{99} = \frac{m}{k-m}$$

$$a_{99} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \Rightarrow \frac{m}{k-m} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \Rightarrow \frac{1}{a_{98}} = \frac{m}{k-m} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{98}} = \frac{2m-k}{k-m} \Rightarrow a_{98} = \frac{k-m}{2m-k}$$

۹ گزینه ۴ با فرض $t_n = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$ داریم:

$$t_5 = 14, t_7 = 17,2, a = \frac{1}{7-5}(-t_5) = -\frac{14}{2} = -\frac{1}{5}$$

$$t_n = -\frac{1}{5}n^2 + bn + c$$

$$t_5 = -\frac{1}{5} \times 25 + 5b + c = 14 \Rightarrow 5b + c = 19$$

$$t_7 = -\frac{1}{5} \times 49 + 7b + c = 17,2 \Rightarrow -9,8 + 7b + c = 17,2 \Rightarrow 7b + c = 27$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5b + c = 19 \\ 7b + c = 27 \end{array} \right\} \xrightarrow{\times(-1)} \left\{ \begin{array}{l} -5b - c = -19 \\ 7b + c = 27 \end{array} \right\} \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$5 \times 4 + c = 19 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow t_n = -\frac{1}{5}n^2 + 4n - 1$$

$$\frac{t_{15}}{t_1} = \frac{-\frac{1}{5} \times 15^2 + 4 \times 15 - 1}{-\frac{1}{5} + 4 - 1} = \frac{-45 + 60 - 1}{-\frac{1}{5} + 3} = \frac{14}{\frac{14}{5}} = 5$$

۱۰ گزینه ۳

چند دسته اول را نوشته و با جملات آخر هر دسته یک دنباله تشکیل داده و جمله چهارم دنباله را پیدا می کنیم:

دسته اول: $\{1\}$

دسته دوم: $\{3, 5\}$

دسته سوم: $\{7, 9, 11\}$

دسته چهارم: $\{13, 15, 17, 19\}$

بنابراین دنباله جملات آخر دسته ها به صورت $1, 5, 11, 19, \dots$ است که می توان به صورت $1, (2 \times 3) - 1, (3 \times 4) - 1, \dots$

نوشت، یعنی جمله عمومی $a_n = n(n+1) - 1$ است، پس:

$$a_{40} = 40 \times (41) - 1 = 1640 - 1 = 1639$$

۱۱ گزینه ۳ آخرین عدد دسته هشتم، $8^2 = 64$ است بنابراین دسته نهم از ۶۵ شروع می شود.

$$\{65, \dots, 81\} \rightarrow b, a \text{ عدد } = \frac{a+b}{2} \rightarrow \text{واسطه حسابی} = \frac{65+81}{2} = \frac{146}{2} = 73$$

۱۲ گزینه ۱

$$6(a+d)^2 = 5a(a+2d) + 3a(a+d) \Rightarrow 2a^2 + ad - 6d^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{-d \pm \sqrt{49d^2}}{4} = \frac{-d \pm 7d}{4} = \begin{cases} a = -2d \\ a = \frac{3}{2}d \end{cases} \Rightarrow \frac{a_4}{d} = \frac{a+3d}{d} = \begin{cases} 1 \\ 4,5 \end{cases}$$

۱۳ گزینه ۴ اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشد داریم:

$$a + c = 2b$$

و اگر a_n جمله عمومی یک دنباله حسابی باشد داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

سه جمله متوالی باید ویژگی جملات متوالی دنباله حسابی را داشته باشند.

$$\Rightarrow a + 5 - a = 2(2a + 1) \Rightarrow 5 = 4a + 2 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

در این صورت جملات دنباله $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \dots$ است. پس داریم:

$$d = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4}$$

$$a_9 = a_1 + 8d = \frac{3}{4} + \frac{56}{4} = \frac{59}{4} = 14,75$$

۱۴ گزینه ۴

روش اول: در هر دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d ، جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 + (n - 1)d$ به دست می آید و اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند $ac = b^2$ است.

$$\begin{aligned} a_3, a_7, a_{16} &\rightarrow a_1 + 2d, a_1 + 6d, a_1 + 15d \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (a_1 + 2d)(a_1 + 15d) = (a_1 + 6d)^2 \\ \rightarrow a_1^2 + 15a_1d + 2a_1d + 30d^2 &= a_1^2 + 36d^2 + 12a_1d \\ \rightarrow 6d^2 - 5a_1d = 0 &\rightarrow d(6d - 5a_1) = 0 \rightarrow 5a_1 = 6d \rightarrow a_1 = \frac{6}{5}d \end{aligned}$$

$$\text{جملات: } \frac{6}{5}d + 2d, \frac{6}{5}d + 6d, \frac{6}{5}d + 15d \rightarrow \frac{16}{5}d, \frac{36}{5}d, \frac{81}{5}d \rightarrow q_{\text{هندسی}} = \frac{\frac{36}{5}d}{\frac{16}{5}d} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

روش دوم: اگر a_m, a_n, a_p جملات یک دنباله حسابی باشند که با یکدیگر تشکیل دنباله هندسی می دهند آن گاه $q_{\text{هندسی}} = \frac{p-n}{n-m}$ است.

$$a_3, a_7, a_{16} \rightarrow q_{\text{هندسی}} = \frac{16-7}{7-3} = \frac{9}{4}$$

۱۵ گزینه ۳

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \dots$$

اگر دقت کنید، عضوهای آخر دسته ها به جز دسته اول یک دنباله هندسی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۲ تشکیل می دهند.

$$\text{دنباله اعضای آخر دسته ها به جز دسته اول: } \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_n = 3 \times 2^{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\text{عضو آخر دسته دوازدهم} = t_{12} = 3 \times 2^{10} = 3 \times 1024 = 3072$$

$$\text{عضو آخر دسته سیزدهم} = t_{13} = 3 \times 2^{11} = 3 \times 2048 = 6144$$

$$\text{دسته سیزدهم: } \{3072, \dots, 6144\}$$

$$\text{تعداد} = 6144 - 3072 + 1 = 3072$$

چون تعداد اعضا عددی زوج است، میانگین تمام اعضا همان میانگین دو عدد وسط است و میانگین دو عدد وسط با میانگین اعداد اول و آخر دسته برابر است، پس داریم:

$$\frac{3072 + 6144}{2} = 4608$$

۱۶ گزینه ۲ طبق فرض داریم:

$$a, ar, ar^2, \dots \rightarrow \text{دنباله هندسی جدید: } \frac{a}{2}, \frac{ar}{2}, \frac{ar^2}{2}, \dots$$

$$\xrightarrow{\text{شرط دنباله هندسی}} \frac{a}{2} + \frac{ar^2}{2} = 2\left(\frac{ar}{2}\right) \xrightarrow{\div \frac{a}{2}} 1 + r^2 = 2r \Rightarrow \underbrace{r^2 - 2r + 1}_{(r-1)^2} = 0 \Rightarrow r = 1$$

پس تمام جملات دنباله حاصل با هم برابر است و دنباله فوق، ثابت است و در نتیجه قدرنسبت دنباله حسابی مورد نظر برابر $d = 0$ است.

$$\Rightarrow r + d = 1 + 0 = 1$$

۱۷ گزینه ۲

$$\frac{a_5}{a_4} = \frac{a_8}{a_7} = q \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{x}{2x+1} \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = x^2 + x$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow q_1 \cdot q_2 = \left(\frac{x_1}{2x_1+1}\right)\left(\frac{x_2}{2x_2+1}\right) = \frac{x_1 x_2}{2x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1} = \frac{-1}{-4 + 4 + 1} = -1$$

۱۸ گزینه ۲

$$S_9 = 73S_3 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^9)}{1-q} = 73 \times \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}$$

$$\Rightarrow 1 - q^9 = 73(1 - q^3) \Rightarrow (1 - q^3)(1 + q^3 + q^6) = 73(1 - q^3)$$

$$\Rightarrow 1 + q^3 + q^6 = 73 \Rightarrow q^6 + q^3 - 72 = 0 \Rightarrow (q^3 - 8)(q^3 + 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} q^3 = 8 \Rightarrow q = 2 & \checkmark \\ q^3 = -9 \Rightarrow q = \sqrt[3]{-9} & \text{غرض} \end{cases}$$

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1 q^2}{a_1} = q^2 = 4$$

۱۹ گزینه ۴

طبق فرض: $a + b + c = 18$

$$\text{حاصل جمع جملات مطلوب} = \frac{1}{2}a + 2b + \frac{3}{2}c + a + \left(-\frac{1}{2}b\right)$$

$$= \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}c = \frac{3}{2}(a + b + c) = \frac{3}{2} \times 18 = 27$$

۲۰ گزینه ۱ ابتدا به کمک مجموع ۱۰ جمله اول، a را می یابیم:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 19 \Rightarrow 1 + 4 + 1 + a + 2 + 2 + 1 + a + 4 + 0 + 2 + a + 8 = 19$$

$$\Rightarrow 3a + 25 = 19 \rightarrow a = -2$$

$$a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{29} = \left(\left[\frac{2}{2}\right] + a\right) + \left(\left[\frac{5}{3}\right] + a\right) + \left(\left[\frac{8}{4}\right] + a\right) + \dots + \left(\left[\frac{29}{11}\right] + a\right)$$

$$= 1 + 1 + \underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2}_{18 \text{ تا}} + 10a = 18 - 20 = -2$$

۲۱ گزینه ۴ چون q و t_1 اعداد طبیعی هستند و دنباله دارای ۵ جمله است قطعاً جملات دنباله افزایشی هستند و جمله پنجم $t_5 = t_1 q^4$ بزرگ ترین جمله دنباله

است. بنابراین q نمی تواند بزرگ تر از ۳ باشد زیرا:

$$q \geq 4 \Rightarrow q^4 \geq 4^4 \Rightarrow q^4 \geq 256 \Rightarrow t_5 \geq 256$$

$$q = 2 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \Rightarrow \text{دنباله: } 1, 2, 4, 8, 16 \\ t_1 = 2 \Rightarrow \text{دنباله: } 2, 4, 8, 16, 32 \\ t_1 = 3 \Rightarrow \text{دنباله: } 3, 6, 12, 24, 48 \\ t_1 = 4 \Rightarrow \text{دنباله: } 4, 8, 16, 32, 64 \\ t_1 = 5 \Rightarrow \text{دنباله: } 5, 10, 20, 40, 80 \\ t_1 = 6 \Rightarrow \text{دنباله: } 6, 12, 24, 48, 96 \end{cases}$$

$$q = 3 \Rightarrow t_1 = 1 \Rightarrow \text{دنباله: } 1, 3, 9, 27, 81$$

۷ دنباله با شرایط گفته شده وجود دارد.

۲۲ گزینه ۱ اگر ضلع مربعها را a_n ، مساحتها را s_n و محیطها را p_n نشان دهیم، داریم:

$$s_n = a_n^2, p_n = 4a_n \Rightarrow a_n = \frac{1}{4}p_n \Rightarrow s_n = \left(\frac{1}{4}p_n\right)^2 = \frac{1}{16}p_n^2$$

طبق فرض سؤال داریم:

$$\frac{s_n}{s_{n-1}} = 9 \Rightarrow \frac{\frac{1}{16}p_n^2}{\frac{1}{16}p_{n-1}^2} = 9 \Rightarrow \frac{p_n^2}{p_{n-1}^2} = 9 \Rightarrow \frac{p_n}{p_{n-1}} = 3$$

بنابراین قدر نسبت دنباله محیطها برابر ۳ است.

۲۳ گزینه ۱ عدد آخر دستهها دنباله هندسی با جمله عمومی 2^n است. بنابراین اعداد دسته سیزدهم به صورت زیر هستند.

$$\{2^{12} + 1, 2^{12} + 2, \dots, 2^{13}\}$$

$$2^{13} - (2^{12} + 1) + 1 = 2^{13} - 2^{12} = 4096$$

چون تعداد اعداد زوج است. میانه این اعداد، میانگین دو عدد وسط است و میانگین دو عدد وسط با میانگین اعداد اول و آخر دسته برابر، پس:

$$\text{میانگین: } \frac{2^{12} + 1 + 2^{13}}{2} = \frac{4096 + 1 + 8192}{2} = \frac{12289}{2} = 6144,5$$

۲۴ گزینه ۴ می دانیم الگوی خطی همان دنباله حسابی است. پس در این سؤال دو دنباله حسابی داریم که اولی را به صورت a_n و قدرنسبت d و دومی را به صورت b_n

و قدرنسبت d' در نظر می گیریم. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a_4 = b_2 \\ a_8 = b_4 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{a_8 - a_4}^{4d} = \overbrace{b_4 - b_2}^{2d'} \quad (*)$$

$$b_{10} = 0 \Rightarrow b_{15} = b_{10} + 5d' = 0 + 5d' \xrightarrow{(*)} b_{15} = 4d$$

۲۵ گزینه ۴

$$a, b, c \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} 2b = a + c \quad (1)$$

$$\text{هندسی: } b, \frac{1}{2}a, \frac{1}{4}c \Rightarrow \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}bc \Rightarrow a^2 = bc \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2) \text{ و } (1)} a^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)c \Rightarrow a^2 = \frac{ac}{2} + \frac{c^2}{2} \Rightarrow 2a^2 = ac + c^2$$

$$\Rightarrow (a-c)(2a+c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ 2a+c=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{a} = -2$$

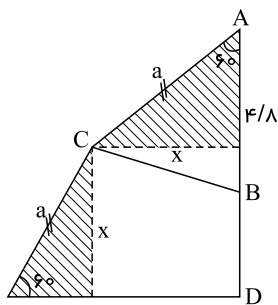
۲۶ گزینه ۴

طبق فرض اگر a, b, c سه جمله نخست و متمایز یک دنباله هندسی باشند و $2a, 3b$ سه جمله نخست یک دنباله حسابی باشند، داریم:

$$\left. \begin{aligned} a, b, c &\Rightarrow ac = b^2 \quad (1) \\ 3b, 2a, c &\Rightarrow 3b + c = 4a \quad (2) \end{aligned} \right\} \rightarrow 3ar + ar^2 = 4a \rightarrow a(r^2 + 3r - 4) = 0 \rightarrow r = -4, r = 1$$

$$\frac{\text{جمله نهم دنباله هندسی}}{\text{جمله ششم دنباله هندسی}} = \frac{ar^8}{ar^5} = r^3 \xrightarrow{r=-4} \text{نسبت خواسته شده} = (-4)^3 = -64$$

۲۷ گزینه ۲ طبق مساحت سینوسی مثلث ABC داریم:

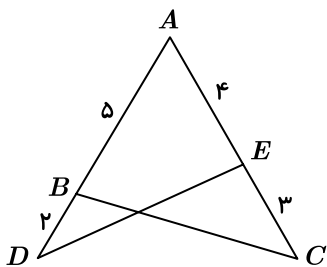


$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{1}{2} a \times 4,8 \times \sin 60^\circ \\ S_{ABC} = 7,2\sqrt{3} \text{ : فرض} \end{cases} \rightarrow 1,2a\sqrt{3} = 7,2\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$$

دو مثلث قائم الزاویه هاشور خورده با هم هم نهشت اند و داریم $x = a \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$ است و در نتیجه:

$$CD = 3\sqrt{3} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{6}$$

۲۸ گزینه ۲



$$S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} = 1,75$$

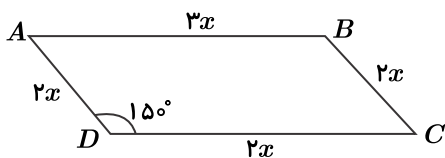
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \sin \hat{A} - \frac{1}{2} \times 7 \times 4 \times \sin \hat{A} = 1,75$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \sin \hat{A} - \frac{1}{2} \times 7 \times 4 \times \sin \hat{A} = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin \hat{A} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \tan \hat{A} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

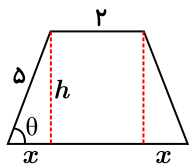
۲۹ گزینه ۴



$$S = 2x \times 3x \times \sin 150^\circ = 54 \Rightarrow 6x^2 \times \frac{1}{2} = 54$$

$$x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{محیط متوازی الاضلاع} = 10x = 30\sqrt{2}$$

۳۰ گزینه ۲ چون مقدار $\cos \theta$ مثبت است، پس θ زاویه حاده است.



$$S = \frac{[2 + (2 + 2x)] \times h}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{5} = 0,6 \Rightarrow x = 3$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8 \Rightarrow \frac{h}{5} = 0,8 \Rightarrow h = 4$$

$$\Rightarrow S = \frac{(2 + 8) \times 4}{2} = 20$$

۳۱ گزینه ۲

$$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \tan \alpha = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$$

$$\frac{1}{|\cos \alpha|} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$$

تساوی فوق زمانی برقرار است که $\cos \alpha < 0$ باشد؛ زیرا در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{-1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{-\cos \alpha}$$

$$\frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = \frac{-1}{\cot \alpha} \Rightarrow \frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha < 0$$

با توجه به اینکه باید $\cos \alpha < 0$ و $\sin \alpha < 0$ باشد پس α در ناحیه سوم دایره مثلثاتی است.

۳۲ گزینه ۴

$$1 + \cot^2 C = \frac{1}{\sin^2 C} \rightarrow 1 + \cot^2 C = \frac{169}{25} \rightarrow \cot^2 C = \frac{144}{25} \rightarrow \cot C = \frac{12}{5}$$

$$\triangle AHC : \cot C = \frac{CH}{AH} \rightarrow \frac{12}{5} = \frac{9}{AH} \rightarrow 12AH = 45 \rightarrow AH = 3,75$$

۳۳ گزینه ۳ طرفین $\frac{4}{3}$ $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم و از رابطه $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 \tan^2 x + 1 = \frac{4}{3}(1 + \tan^2 x)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 6 \tan^2 x + 3 = 4 + 4 \tan^2 x \Rightarrow 2 \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2}$$

روش دوم: از روابط $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ و $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ استفاده می‌کنیم.

$$2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$$

$$2 \sin^2 x + 1 - \sin^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

۳۴ گزینه ۲ با توجه به رابطه داده‌شده، مقدار کسینوس را به دست می‌آوریم:

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 2$$

می‌دانیم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{ربع سوم}} \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

۳۵ گزینه ۳ روش اول: به ازای حاصل عبارت برابر ۱ و به ازای $\alpha = \frac{\pi}{4}$ برابر ۱- است که این تساوی ها فقط در گزینه ۳، دیده می شود.

روش دوم: در فرمول های مثلثاتی داریم:

$$\sin^4 \alpha = (1 - \cos^2 \alpha)^2 = \cos^4 \alpha - 2 \cos^2 \alpha + 1$$

$$\cos^4 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha)^2 = \sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1$$

این فرمول ها را در صورت سؤال جای گذاری می کنیم و سپس داریم:

$$\Rightarrow T = \frac{\cos^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha + 1} - \frac{\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 1} = \frac{(\cos^2 \alpha + 1)^2}{\cos^2 \alpha + 1} - \frac{(\sin^2 \alpha + 1)^2}{\sin^2 \alpha + 1} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

۳۶ گزینه ۲ می دانیم $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ است.

$$A = \sqrt[5]{4 \sqrt[3]{16}} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{2^2 \times \sqrt[3]{2^4}} \times 2^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{2^2 \times 2^{\frac{4}{3}}} \times 2^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{2^{\frac{10}{3}}} \times 2^{\frac{4}{5}}$$

$$= (2^{\frac{10}{3}})^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} = 2^{\frac{10}{15}} \times 2^{\frac{4}{5}} = 2^2$$

$$\text{پس: } (2A)^{-\frac{1}{2}} = (2 \times 2^2)^{-\frac{1}{2}} = (2^3)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$$

۳۷ گزینه ۳

مقدار A را به ساده ترین حالت ممکن درمی آوریم:

$$A = \sqrt[5]{9 \sqrt{3} (12)^{-1,5}} = \sqrt[5]{3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} (2^2 \times 3)^{-\frac{3}{2}}} = \sqrt[5]{3^{\frac{5}{2}} (2^{-3} \times 3^{-\frac{3}{2}})}$$

$$= (3^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{5}} \times 2^{-3} \times 3^{-\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{3}{2}} \times 2^{-3} = 3^{-1} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

$$\text{پس: } (1 + A^{-1})^{\frac{1}{2}} = (1 + 24)^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5$$

۳۸ گزینه ۱ طبق فرض داریم:

$$a^{\frac{1}{3}} = 27 a^{\frac{10}{3}} \Rightarrow 27 a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{27} \xrightarrow{a>0} a = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{عبارت مورد نظر: } \frac{\frac{1}{a} - 3}{1 + \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - 3}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = \frac{3(4 - 2\sqrt{3})}{2} = 6 - 3\sqrt{3}$$

۳۹ گزینه ۲

ابتدا هر دو عبارت را ساده می کنیم.

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{5 - \sqrt{6}} \times \frac{5 + \sqrt{6}}{5 + \sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{2} + 2\sqrt{12} + 15\sqrt{3} + 3\sqrt{18}}{25 - 6}$$

$$= \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 9\sqrt{2}}{19} = \frac{19\sqrt{2} + 19\sqrt{3}}{19} = \frac{19(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{19} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \frac{2}{\sqrt[4]{3^2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = \sqrt{3} + 1$$

پس: $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = \sqrt{2} - 1$

روش دوم:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} &= \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} \times \sqrt{3})} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{8} + \sqrt{27})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{8} + \sqrt{27}} - \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

۴۰. گزینه ۱ ابتدا هر دو عبارت را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{27} - 1}{4 + \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - 1}{4 + \sqrt{3}} \times \frac{4 - \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3} - 9 - 4 + \sqrt{3}}{16 - 3} = \frac{13\sqrt{3} - 13}{13} = \frac{13(\sqrt{3} - 1)}{13} = \sqrt{3} - 1$$

$$(2 - \sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

پس: $\frac{\sqrt{27} - 1}{4 + \sqrt{3}} + (2 - \sqrt{3})^{-1} = \sqrt{3} - 1 + 2 + \sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3}$

۴۱. گزینه ۲

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{(4 + \sqrt{7})^{-1}} \times \sqrt{1 + \sqrt{7}} &= \sqrt[4]{\frac{1}{4 + \sqrt{7}}} \times \sqrt[4]{(1 + \sqrt{7})^2} = \frac{1}{\sqrt[4]{4 + \sqrt{7}}} \times \sqrt[4]{1 + 7 + 2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt[4]{8 + 2\sqrt{7}}}{\sqrt[4]{4 + \sqrt{7}}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{2(4 + \sqrt{7})}{4 + \sqrt{7}}} = \sqrt[4]{2} \end{aligned}$$

۴۲. گزینه ۳

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\sqrt[3]{28}} \times \sqrt[4]{162} \times \sqrt[4]{4\sqrt{2}} &= \sqrt[4]{2^{\frac{2}{3}}} \times 3\sqrt[4]{2} \times 2\sqrt[4]{2} \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \times 3 \times 2^{\frac{1}{4}} \times 2 \times 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{6}} \times 6 = 12 \\ \frac{12}{\sqrt{6}} &= 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

۴۳. گزینه ۱

داریم: $\sqrt[3]{49} = 7^{\frac{2}{3}}$. اکنون عبارت را برحسب توان‌های ۷ بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt[4]{49\sqrt{7}}}{\sqrt[4]{3^4\sqrt{7}^{-1}}} = \frac{(7^2 \times 7^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}}{7(7^3 \times 7^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}} = \frac{7^{\frac{5}{8}}}{7^{\frac{13}{8}}} = \frac{7^{\frac{5}{8}}}{7^{\frac{13}{8}}} = 7^{-\frac{3}{2}} \\ \Rightarrow \frac{A}{\sqrt[3]{49}} &= \frac{7^{-\frac{3}{2}}}{7^{\frac{2}{3}}} = 7^{-\frac{17}{6}} = 7^{-2} = \frac{1}{49} \end{aligned}$$

۴۴. گزینه ۴ برای پاسخ به سؤال ابتدا صورت عبارت خواسته شده را کمی ساده می‌کنیم در این سؤال اتحاد مربع دو جمله‌ای و مزدوج مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2 \xrightarrow{\text{مربع دو جمله‌ای}} ((a - b)^2)^2 ((a + b)^2)^2$$

$$= (a-b)^4(a+b)^4 = ((a-b)(a+b))^4 = (a^2-b^2)^4$$

و اما $a^2 = \sqrt{\sqrt{6}-2}$ و $b^2 = \sqrt{\sqrt{6}+2}$ می شوند پس داریم:

$$\begin{aligned} ((\sqrt{\sqrt{6}-2} - \sqrt{\sqrt{6}+2})^2)^2 &= (\sqrt{6}-2 + \sqrt{6}+2 - 2\sqrt{6-4})^2 = (2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2 \\ &= 24 + 8 - 8\sqrt{12} = 32 - 16\sqrt{3} = 16(2-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

۴۵ گزینه ۴ داخل پراتنز اول مخرج مشترک می گیریم:

$$(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x} = \frac{(\sqrt[3]{x^4} + 1 + \sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{x^2} - 1)}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

می دانیم معادله درجه ۲ به صورت $x^2 - sx + p$ است. درواقع مجموع ریشه ها ۲ خواهد بود.

داریم:

$$x_1 + x_2 = s = 2$$

۴۶ گزینه ۳ در فرض سؤال در سمت چپ، مخرج مشترک گرفته و داریم:

$$\frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{a^3-1} = 2 \Rightarrow \frac{a^3-1+a^3+1}{(a^3+1)(a^3-1)} = 2 \Rightarrow \frac{2a^3}{a^6-1} = 2 \Rightarrow \frac{a^3}{a^6-1} = 1 \Rightarrow a^6-1 = a^3 \Rightarrow a^6 = a^3+1 \quad (1)$$

حال خواسته سؤال را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a^3 - \sqrt{a^3} + 1} + \frac{1}{a^3 + \sqrt{a^3} + 1} \right)^{1401} &= \left(\frac{a^3 + \sqrt{a^3} + 1 + a^3 - \sqrt{a^3} + 1}{(a^3 + 1 - \sqrt{a^3})(a^3 + 1 + \sqrt{a^3})} \right)^{1401} = \\ &= \left(\frac{2a^3 + 2}{(a^3 + 1)^2 - a^3} \right)^{1401} \xrightarrow{(1)} \left(\frac{2a^3 + 2}{a^6 + 2a^3 + 1 - a^3} \right)^{1401} \xrightarrow{(1)} \left(\frac{2a^3 + 2}{a^3 + 1 + 2a^3 + 1 - a^3} \right)^{1401} = \left(\frac{2a^3 + 2}{2a^3 + 2} \right)^{1401} = \\ &= 1^{1401} = 1 \end{aligned}$$

۴۷ گزینه ۴

فرض: $\frac{\sqrt{1+\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}-1}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} = A \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$

$$\frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = A^2 \Rightarrow \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = A^2 \xrightarrow{\text{مزدوج مخرج } x}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{1} \xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{6} + 2 \Rightarrow \text{حاصل عبارت مطلوب} = \sqrt{6} + 2 - 2 = \sqrt{6}$$

۴۸ گزینه ۱

h = ارتفاع و x = قاعده

$$h = 3x + 2$$

$$S_1 = \frac{1}{2}x(3x + 2) \quad S_2 = \frac{1}{2}(x + 4)(3x + 6)$$

$$S_2 = \frac{9}{2}S_1 \Rightarrow \frac{1}{2}(x + 4)(3x + 6) = \frac{9}{2} \times \frac{1}{2}x(3x + 2)$$

$$6x^2 + 36x + 48 = (3x^2 + 2x) \times 9 \Rightarrow 6x^2 + 36x + 48 = 27x^2 + 18x$$

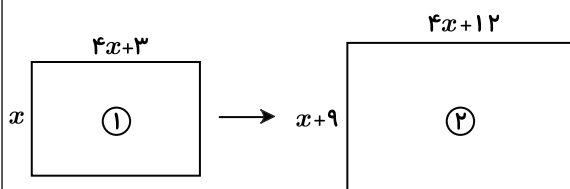
$$21x^2 - 18x - 48 = 0 \Rightarrow 7x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{121}}{7} = \frac{3 \pm 11}{7} = \begin{cases} 2 \checkmark \\ -\frac{8}{7} \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8$$

۴۹ گزینه ۴

داریم:



$$P_1 = 2(5x + 3)$$

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{(4x + 12)(x + 9)}{x(4x + 3)} = 1.0 \Rightarrow 36x^2 - 18x - 108 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+7}{4} = 2 \checkmark \\ x_2 = \frac{1-7}{4} < 0 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_1 = 2(13) = 26$$

۵۰ گزینه ۱ هر نامعادله را جداگانه حل کرده و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{2x-3}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & 4 & +\infty \\ \hline & + & - & + & - \end{array} \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 4$$

$$\frac{2x-3}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-x-6}{x+1} < 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -6 & -1 & +\infty \\ \hline & - & + & - & + \end{array} \Rightarrow x < -6 \text{ یا } x > -1$$

$$\Rightarrow x < -6 \text{ یا } x > -1 \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $x > 4$ یا $x < -6$ می‌رسیم که همان $\mathbb{R} - [-6, 4]$ است.

۵۱ گزینه ۳ چون مجموعه جواب نامعادله درجه دوم به صورت بازه $(a, +\infty)$ است؛ پس نامعادله نمی‌تواند درجه دوم باشد (زیرا در نامعادله درجه دوم باید

مجموعه جواب یا بین دو ریشه یا خارج دو ریشه باشد)؛ پس به‌ناچار باید $2a + 3 = 0$ باشد؛ یعنی $a = -\frac{3}{2}$ است. در این صورت نامعادله به صورت زیر

خواهد بود:

$$(4b - 5)x + 4c + 1 < 0$$

بنابراین برای اینکه مجموعه جواب به صورت $(a, +\infty)$ باشد، باید ضریب x منفی باشد تا جهت نامعادله عوض شود.

$$x > \frac{-4c - 1}{4b - 5}$$

چون b طبیعی است، برای اینکه $0 < 4b - 5$ باشد، باید الزاماً $b = 1$ باشد.

$$\Rightarrow x > \frac{-4c - 1}{-1} \Rightarrow x > 4c + 1$$

طبق فرض باید $a = 4c + 1$ که در این صورت داریم:

$$4c + 1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow c = -\frac{5}{8} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{5}{8}} = \frac{12}{5} = 2,4$$

۵۲ گزینه ۱ عبارت $\frac{1-a}{9-3a}$ در صورتی فاقد ریشه دوم است که منفی باشد؛ یعنی داشته باشیم:

a	۱	۳
$1-a$	+	-
$9-3a$	+	-
$\frac{1-a}{9-3a}$	+	+

ریشه‌ها: $a = 1, a = 3$
طبق جدول تعیین علامت: $1 < a < 3$

همچنین اگر $a = 3$ باشد، عبارت تعریف نشده خواهد بود؛ پس به ازای دو مقدار $a = 2$ و $a = 3$ ریشه دوم عبارت مورد نظر وجود ندارد.

۵۳ گزینه ۳ روش اول:

$$\frac{7x - 8}{x^2 - x - 2} > \frac{x}{x - 2} \rightarrow \frac{7x - 8}{(x - 2)(x + 1)} - \frac{x}{x - 2} > 0$$

$$\rightarrow \frac{7x - 8 - x^2 - x}{(x - 2)(x + 1)} > 0 \rightarrow \frac{-x^2 + 6x - 8}{(x - 2)(x + 1)} > 0$$

$$\rightarrow \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 2)(x + 1)} < 0 \rightarrow \frac{(x - 4)(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)} < 0$$

$$\rightarrow \frac{x - 4}{x + 1} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & -1 & 2 & 4 & +\infty \\ \hline & + & - & + & - & + \end{array}$$

توجه کنید $x=2$ مخرج را صفر می‌کند.

$$\rightarrow -1 < x < 2 \text{ یا } 2 < x < 4 \rightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 4)$$

روش دوم:

به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$$x = 0 \rightarrow \frac{-8}{-2} > 0 \text{ : درست} \rightarrow \text{گزینه دوم حذف می‌شود}$$

$$x = 3 \rightarrow \frac{13}{4} > 3 \text{ : درست} \rightarrow \text{گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند}$$

۵۴ گزینه ۳

$$(\delta - 2m)x^2 - (2m + n - \delta)x - n < 0$$

در معادله درجه ۲، $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + c = b$ باشد، آن گاه یکی از ریشه ها برابر با ۱- است:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{n}{\delta - 2m} \end{cases}$$

با توجه به مجموعه جواب نامعادله باید ضریب x^2 مثبت باشد، پس با توجه به طبیعی بودن m داریم: $m = 1$ یا $m = 2$

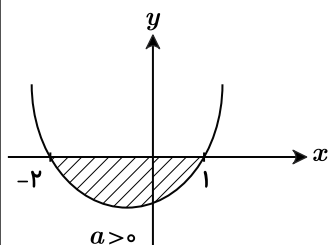
غ ق $m = 1 \Rightarrow$ بازه جواب $(-1, -1)$ اگر

پس $m = 2$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow \frac{n}{\delta - 2m} = m - 2 \Rightarrow \frac{n}{1} = 0 \Rightarrow n = 0$$

$$\Rightarrow m + n = 2$$

۵۵ گزینه ۱ نامعادله به صورت زیر است:



$$A: \underbrace{(m + 4)x^2 + (m - n + 4)x - n < 0}_{A} \xrightarrow{\text{پاسخ: } (m+1, -1)} \text{ دو ریشه دارد}$$

$$\Rightarrow m + 4 > 0, \text{ ریشه ها: } m + 1, -1, m + 1 < -1$$

$$\Rightarrow -4 < m < -2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = -3 \Rightarrow \text{ریشه های } A = \{-2, -1\}$$

$$\Rightarrow A = x^2 + (1 - n)x - n \xrightarrow{A(-2)=0} 4 + 2n - 2 - n = 0 \Rightarrow n = -2$$

$$\Rightarrow mn = (-3)(-2) = 6$$

۵۶

روش اول: هر نامعادله را جداگانه حل کرده و سپس از جواب ها اشتراک می گیریم گزینه ۴

$$\frac{x+1}{2x-1} > 1 \rightarrow \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{1} > 0 \rightarrow \frac{x+1-2x+1}{2x-1} > 0 \rightarrow \frac{-x+2}{2x-1} > 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & \frac{1}{2} & 2 & +\infty \\ \hline & - & + & - & + \end{array} \rightarrow \frac{1}{2} < x < 2 \quad (I)$$

$$\frac{x+1}{2x-1} < 3 \rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - \frac{3}{1} < 0 \rightarrow \frac{x+1-6x+3}{2x-1} < 0 \rightarrow \frac{-5x+4}{2x-1} < 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & +\infty \\ \hline & - & + & - & + \end{array} \rightarrow x > \frac{1}{2} \text{ یا } x < \frac{4}{5} \quad (II)$$

$(\frac{4}{5} < x < 2)$ از اشتراک I و II به جواب $\frac{4}{5} < x < 2$ می رسم

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم

$$x = 1,5 \xrightarrow{\text{نامعادله}} 1 < \frac{2,5}{2} < 3 : \text{درست} \rightarrow \text{گزینه‌های اول و دوم حذف می‌شوند}$$

$$x = 1 \xrightarrow{\text{نامعادله}} 1 < 2 < 3 : \text{درست} \rightarrow \text{گزینه سوم حذف می‌شود}$$

۵۷ گزینه ۳

روش اول: هر نامعادله را جداگانه حل کرده و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{2x-1}{x+1} > -1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} + \frac{1}{1} > 0 \Rightarrow \frac{2x-1+x+1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3x}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-1} \mid \frac{-1}{+} \mid \frac{0}{-} \mid \frac{+\infty}{+} \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 0 \quad (I)$$

$$\frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - \frac{3}{1} < 0 \Rightarrow \frac{2x-1-3x-3}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-x-4}{x+1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-1} \mid \frac{-4}{+} \mid \frac{-1}{-} \mid \frac{+\infty}{-} \Rightarrow x < -4 \text{ یا } x > -1 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک } I, II} \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \Rightarrow x < -4 \text{ یا } x > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [-4, 0]$$

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$$x = -5 \xrightarrow{\text{نامعادله}} -1 < \frac{11}{4} < 3 : \text{درست} \Rightarrow \text{گزینه‌های اول و دوم حذف می‌شوند}$$

$$x = 0 \xrightarrow{\text{نامعادله}} -1 < -1 < 3 : \text{نادرست} \Rightarrow \text{گزینه چهارم حذف می‌شود}$$

۵۸

گزینه ۲ البته مجموعه نامعادله باید بازه $(2, 4)$ باشد نه $[2, 4]$ از طرفی مخرج کسر به ازای $x > \frac{3}{2}$ همواره مثبت است.

$$x - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

در بازه $(1, 4)$ عبارت فوق، منفی است و برای آن که جواب نامعادله $(2, 4)$ باشد در این بازه پراتنژ اول نیز باید منفی باشد. در ضمن $x = 2$ ریشه این عبارت است.

$$x = 2 \Rightarrow 4m^2 - 4 - 8m + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\text{if } m = 0 \Rightarrow (-x^2 + 4)$$

این عبارت در بازه $(2, 4)$ همواره منفی است و قابل قبول است.

$$\text{if } m = 2 \Rightarrow (3x^2 - 8x + 4)$$

این عبارت در بازه $(2, 4)$ مثبت است و قابل قبول نیست. بنابراین فقط $m = 0$ مورد قبول است.

۵۹

گزینه ۲ گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم. توجه کنید که به دلیل وجود $\sqrt{x}$ ، باید $x \geq 0$ باشد.

$$m = -1 \Rightarrow P = \frac{\overbrace{(4x+4)(2x-3)}^{\text{مثبت}}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0$$

x	0	1	$\frac{3}{2}$	4
P	■	-	+	-

ن ن ن

$\Rightarrow$ جواب: $(1, \frac{3}{2}] \cup (4, +\infty)$

$$m = \frac{1}{3} \Rightarrow P = \frac{(-\frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \xrightarrow{\times(-\frac{9}{4})} P = \frac{(2x^2 + 3x - 9)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+3)(2x-3)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \leq 0$$

عبارت $(2x-3)^2$ همواره نامنفی است، پس $x = \frac{3}{2}$ یکی از جواب‌های نامعادله است. از طرفی به دلیل $x \geq 0$ ، عبارت $x+3$ مثبت است، پس:

$$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) < 0 \Rightarrow 1 < x < 4$$

$x = \frac{3}{2}$ در بازه $(1, 4)$ قرار دارد، پس این بازه جواب نامعادله است.

$$m = 1 \Rightarrow P = \frac{(-4x+4)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0$$

x	0	1	$\frac{3}{2}$	4
P	■	-	-	+

ن ن ن

$\Rightarrow$ جواب: $[\frac{3}{2}, 4)$

$$m = \frac{7}{3} \Rightarrow P = \frac{(\frac{4}{9}x^2 - \frac{28}{3}x + 4)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \xrightarrow{\times(\frac{9}{4})} P = \frac{(1 \circ x^2 - 21x + 9)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(5x-3)(2x-3)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0$$

عبارت $(2x-3)^2$ همواره نامنفی است، پس:

$$\xrightarrow{x=\frac{3}{2}} \frac{5x-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \Rightarrow$$

x	0	$\frac{3}{5}$	1	4
P	■	-	+	-

ن ن ن

$\Rightarrow$ جواب: $[\frac{3}{5}, 1) \cup (4, +\infty) \cup \{\frac{3}{2}\}$

۶۰. گزینه ۲ ابتدا نامعادله دو طرفه $0 < \frac{1-3x}{x+1} < 2$ را حل می‌کنیم.

$$\frac{1-3x}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x}{\frac{1-3x}{x+1}} \left| \begin{array}{c} -1 \\ \frac{1}{3} \end{array} \right. \begin{array}{c} - \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} + \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} - \\ - \end{array} \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1-3x}{x+1} > -2 \Rightarrow \frac{1-3x}{x+1} + 2 > 0 \Rightarrow \frac{1-3x+2x+2}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3-x}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} \quad \begin{array}{c|cc} & -1 & 3 \\ \hline & - & + & - \end{array} \Rightarrow -1 < x < 3 \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) جواب نامعادله است.

$$(1) \cap (2) : \frac{1}{3} < x < 3$$

حال حدود $\frac{x}{3}$ و سپس $\left[\frac{x}{2}\right]$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{1}{6} < \frac{x}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0, 1$$

۶۱ گزینه ۴ طبق فرض داریم:

$$-2 < \frac{2}{x^2-3x+2} < 0 \Rightarrow \frac{x^2-3x+2}{2} < \frac{-1}{2} \Rightarrow x^2-3x+2 < -1 \Rightarrow x^2-3x+3 < 0 \quad (*)$$

در عبارت درجه دوم x^2-3x+3 داریم $\Delta = 9-12 < 0$, $a = 1 > 0$, پس این عبارت همواره مثبت بوده و نامعادله (*) هیچ جواب حقیقی ندارد.

۶۲ گزینه ۱ روش اول: باید نامعادله $|2x^2-4| < 2x$ را حل کنیم می‌دانیم که ریشه‌های داخل قدرمطلق $\pm\sqrt{2}$ هستند.

$$x < -\sqrt{2} : 2x^2-4 < 2x \rightarrow 2x^2-2x-4 < 0 \rightarrow x^2-x-2 < 0 \rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset$$

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} : -2x^2+4 < 2x \rightarrow 2x^2+2x-4 > 0 \rightarrow x^2+x-2 > 0 \rightarrow (x+2)(x-1) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -2 \text{ یا } x > 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 1 < x < \sqrt{2}$$

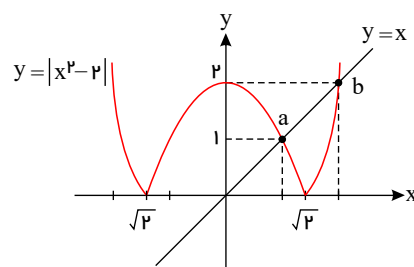
$$x > \sqrt{2} : 2x^2-4 < 2x \rightarrow 2x^2-2x-4 < 0 \rightarrow x^2-x-2 < 0 \rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \sqrt{2} < x < 2$$

از اجتماع جواب‌های بدست آمده به جواب $x \in (1, 2)$ می‌رسیم بنابراین $b-a=1$ است.

روش دوم: تابع $y = |2x^2-4|$ و $y = 2x$ را رسم کرده و مشخص می‌کنیم در چه بازه‌ای تابع $y = |2x^2-4|$ زیر تابع $y = 2x$ قرار دارد.

$$|2x^2-4| < 2x \rightarrow |2(x^2-2)| < 2x \rightarrow |x^2-2| < x$$

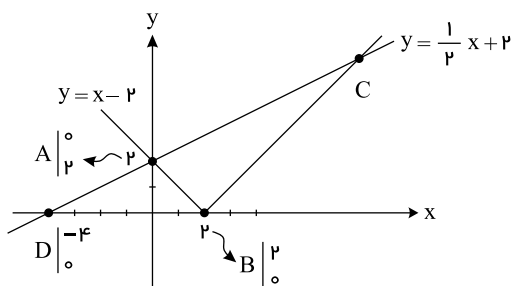


برای این منظور باید نقاط a, b را پیدا کنیم.

$$|x^2 - 2| = x \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = x \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 & b \\ x = -1 & \text{غ ق ق} \end{cases} \\ x^2 - 2 = -x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غ ق ق} \\ x = 1 & a \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین جواب مسئله بازه $(1, 2)$ است و $b - a = 1$ است.

۶۳ گزینه ۴ دو تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2|$ و $y = \frac{1}{2}x + 2$ را رسم می کنیم.



نقطه C محل برخورد شاخه $y = x - 2$ با خط $y = \frac{1}{2}x + 2$ است:

$$\frac{1}{2}x + 2 = x - 2 \Rightarrow x = 4, \quad y = 4 \Rightarrow C \begin{vmatrix} 4 \\ 4 \end{vmatrix}$$

پس مساحت مثلث ABC (سطح محصور بین دو نمودار) برابر است با:

$$\text{displaystyle } S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{BDC}} - S_{\overset{\Delta}{ABD}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} BD \times y_C \right) - \left(\frac{1}{2} BD \times y_A \right) = \frac{1}{2} BD (y_C - y_A)$$

$$= \frac{1}{2} (2 - 4) (4 - 2) = 12$$

۶۴ گزینه ۲ باید نامعادله $(x - 1)^2 > 4x^4$ را حل کنیم.

$$(x - 1)^2 > 4x^4 \rightarrow \sqrt{(x - 1)^2} > \sqrt{4x^4} \rightarrow |x - 1| > 2x^2$$

$$x \geq 1 : x - 1 > 2x^2 \rightarrow 2x^2 - x + 1 < 0 \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{a > 0, \Delta < 0} \emptyset \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset \quad (I)$$

$$x < 1 : -x + 1 > 2x^2 \rightarrow 2x^2 + x - 1 < 0$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
		+	-	+

$$\rightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -1 < x < \frac{1}{2} \quad (II)$$

از اجتماع I و II به جواب $x \in (-1, \frac{1}{2})$ می رسیم و بیشترین مقدار $b - a$ برابر $\frac{3}{2} - (-1) = \frac{5}{2}$ است.

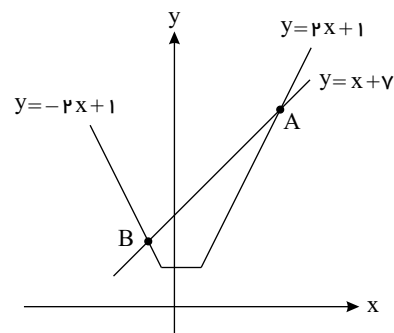
۶۵ گزینه ۴ تابع $y = |x - 2| + |x + 1|$ یک تابع گلدانی است که به ازای $x < -1$ اکیداً نزولی و به ازای $x > 2$ اکیداً صعودی و در فاصله

$-1 \leq x \leq 2$ ثابت است.

$$x < -1: y = -x + 2 - x - 1 \rightarrow y = -2x + 1$$

$$-1 \leq x \leq 2: y = -x + 2 + x + 1 \rightarrow y = 3$$

$$x > 2: y = x - 2 + x + 1 \rightarrow y = 2x - 1$$



$$\left\{ \begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = x + 7 \end{array} \right. \rightarrow x = 8, y = 15 \rightarrow A \left| \begin{array}{l} 8 \\ 15 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} y = -2x + 1 \\ y = x + 7 \end{array} \right. \rightarrow x = -2, y = 5 \rightarrow B \left| \begin{array}{l} -2 \\ 5 \end{array} \right.$$

$$\text{پس } AB = \sqrt{(8+2)^2 + (15-5)^2} = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

۶۶ گزینه ۱ طبق فرض داریم:

$$15x^2 + 73x + 14 < 0 \Rightarrow \underbrace{(5x+1)}_{x=-\frac{1}{5}} \underbrace{(3x+14)}_{x=-\frac{14}{3}} < 0 \Rightarrow \frac{-14}{3} < x < \frac{-1}{5} \quad (I)$$

$$\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| > 3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} - 1 > 3 \Rightarrow \frac{x-1}{2} > 4 \Rightarrow x > 9 \\ \frac{x-1}{2} - 1 < -3 \Rightarrow \frac{x-1}{2} < -2 \Rightarrow x < -3 \end{array} \right\} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (I), (II)}} -\frac{14}{3} < x < -3 \Rightarrow \max(b-a) = -3 - \left(-\frac{14}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

۶۷ گزینه ۲ $y^2 - 1$ شمارنده ۷۲ است؛ بنابراین:

$$y^2 = 0, 4, 9, 25 \rightarrow y = 0, \pm 2, \pm 3, \pm 5$$

بنابراین با حذف ۳ زوج مرتب عضو که زوج مرتب‌های f تابع می‌شود.

۶۸ گزینه ۲

$$g(x) = k \quad f(x) = x$$

$$g(3x) + 2f(3+x) = 3 + 2x \Rightarrow k + 2(3+x) = 3 + 2x$$

$$\Rightarrow k + 6 = 3 \Rightarrow k = -3 \Rightarrow g(x) = -3$$

$$\frac{f(-1)}{g(4)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

۶۹ گزینه ۳

طبق فرض:

$$f(x) = c \quad (c \in \mathbb{R}), \quad g(x) = x$$

$$f(2x) - g(1-x) = 4 + x \Rightarrow c - (1-x) = 4 + x \Rightarrow c = 5 \rightarrow f(x) = 5$$

$$\Rightarrow g(-1)f(3) = -1 \times 5 = -5$$

۷۰ گزینه ۱ نمودارهای دو تابع به صورت زیر هستند.

$$y = |x + 2| + |x - 1| = \begin{cases} x + 2 + x - 1 = 2x + 1, & x \geq 1 \\ x + 2 - (x - 1) = 3 & -2 \leq x < 1 \\ -x - 2 - x + 1 = -2x - 1 & x < -2 \end{cases}$$

$$3y + x = 17 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{17}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3y + x = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 3(2x + 1) + x &= 17 \\ 7x &= 14 \rightarrow x = 2 \\ y &= 2 \times 2 + 1 = 5 \\ \Rightarrow B \mid \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 5 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ 3y + x = 17 \end{cases} \Rightarrow 3(-2x - 1) + x = 17 \Rightarrow -5x = 20 \Rightarrow x = -4$$

$$y = -2(-4) - 1 = 7 \Rightarrow A \mid \begin{aligned} x &= -4 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{(2 + 4)^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

۷۱ گزینه ۳

$$\begin{aligned} |a| + 2 > 1 &\Rightarrow f(2 + |a|) = a^2 + 4 + 4|a| - 2 - |a| - 7 \\ 1 - |a| < 1 &\Rightarrow f(1 - |a|) = 2 - 2|a| - 1 \end{aligned}$$

$$f(1 - |a|) = f(2 + |a|) \Rightarrow a^2 + 5|a| - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ |a| = -6 \text{ غ ق} \end{cases}$$

۷۲ گزینه ۲ با توجه به ضابطه تابع داریم:

$$1 + a^2 > 1 \Rightarrow |1 + a^2| > 1 \Rightarrow f(1 + a^2) = 7 - 3(1 + a^2)$$

$$a^2 > 0, 1 + a^2 > 1 \Rightarrow \left| \frac{-a^2}{1 + a^2} \right| < 1 \Rightarrow f\left(\frac{-a^2}{1 + a^2}\right) = -2\left(\frac{-a^2}{1 + a^2}\right)$$

بنابراین:

$$7 - 3(1 + a^2) = -2\left(\frac{-a^2}{1 + a^2}\right) \Rightarrow 4 - 3a^2 = \frac{2a^2}{1 + a^2} \xrightarrow{a^2=t>0} 3t^2 + t - 4 = 0 \Rightarrow t = 1 \checkmark, t = \frac{-4}{3} \times \Rightarrow a = \pm 1$$

اختلاف مقادیر a برابر است با:

$$1 - (-1) = 2$$

۷۳ گزینه ۳

$$\frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{9} \rightarrow \text{تعداد} = 1$$

$$\frac{1}{7} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{5}{9} \rightarrow \text{تعداد} = 20$$

$$\frac{3}{1} \quad \frac{6}{9} \quad \frac{5}{9} \rightarrow \text{تعداد} = 90$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 5 \end{array} \quad \overline{\text{تعداد کل}} = 111$$

۷۴ گزینه ۲ اعداد سه رقمی مطلوب به دسته‌های زیر تقسیم می‌شوند:

(۱) اعدادی که صدگان بیشتر یا مساوی ۳ دارند:

$$\{3, 5, 7, 8\}$$

$$4 \times 6 \times 5 = 120$$

(۲) اعدادی که دهگان بیشتر از ۵ دارند و صدگان‌شان برابر ۲ است:

$$1 \times \underbrace{2}_{7,8} \times 5 = 10$$

(۳) اعدادی که یکان بیشتر از ۷ و صدگان برابر ۲ و دهگان برابر ۵ دارند:

$$1 \times \underbrace{1}_{\{5\}} \times \underbrace{1}_{\{8\}} = 1$$

اکنون طبق اصل جمع داریم:

$$\text{تعداد حالت‌های مطلوب} = 120 + 10 + 1 = 131$$

۷۵ گزینه ۳ برای اینکه عددی مضرب ۶ باشد می‌بایست زوج بوده و بر ۳ نیز بخش‌پذیر باشد، بنابراین رقم یکان الزاماً باید ۲ باشد.

برای ۱۰ رقم اول می‌توان حالت‌های زیر را در نظر گرفت به صورتی که مجموع اعداد بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

عدد ۲	عدد ۱
۱	۱۰
۴	۷
۷	۴
۱۰	۱

$$\binom{10}{10} + \binom{10}{3} + \binom{10}{6} + \binom{10}{9} = 1 + 120 + 210 + 10 = 341$$

۷۶ گزینه ۳ برای حل این سؤال از متمم استفاده می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \text{کل حالات: } \binom{9}{5} &= \frac{9!}{5! \times 4!} = 126 \\ \text{حالات نامطلوب} &= \text{هر دو نفر دعوت شوند (سه نفر از سایر نفرات انتخاب شوند).} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{حالات مطلوب} = 126 - 35 = 91$$

۷۷ گزینه ۴ روش اول

دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: به دو نفر دو کتاب برسد و به یک نفر یک کتاب برسد.

$$\binom{5}{2} \binom{3}{2} \binom{1}{1} \times \begin{matrix} 3 \\ \downarrow \\ \begin{cases} A, B, C \\ A, B, C \\ A, B, C \end{cases} \end{matrix} = 10 \times 3 \times 1 \times 3 = 90$$

حالت دوم: به دو نفر یک کتاب برسد و به یک نفر سه کتاب برسد.

$$\binom{5}{1} \binom{4}{1} \times \binom{3}{3} \times \begin{matrix} \downarrow 3 \\ \left\{ \begin{array}{l} A, B, C \\ A, B, C \\ A, B, C \end{array} \right. \end{matrix} = 5 \times 4 \times 1 \times 3 = 60$$

بنابراین کل حالات $150 = 90 + 60$ است.

روش دوم

طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$35 - 3 \times 25 + 3 = 243 - 3 \times 32 + 3 = 150$$

۷۸ گزینه ۴ چون می‌خواهیم ترتیب ارقام عدد به صورت نزولی باشد، کافی است سه رقم دلخواه از میان ارقام داده شده انتخاب کنیم و آنها را به صورت نزولی مرتب کنیم تا حالت مطلوب مسئله رخ دهد (توجه شود که اگر رقم صفر انتخاب شود، قطعاً در رقم یکان قرار می‌گیرد؛ بنابراین مشکلی ایجاد نمی‌شود)؛ پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$\binom{7}{3} \times 1 = 35$$

۷۹ گزینه ۲

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{k}{k+5} \binom{n}{k} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{k}{k+5} \times \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(k-1)!} = \frac{k}{k+5} \times \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!} \Rightarrow \frac{n}{k+5} = 1 \Rightarrow n = k+5$$

$$k = 2 \Rightarrow n = 7 \Rightarrow n + k = 9$$

۸۰ با توجه به اینکه سکه را ۳ بار پرتاب کرده‌ایم، حداکثر ۳ بار ممکن است رو بیاید؛ پس عدد روی تاس قطعاً (۱) است. احتمال این رخداد برابر است با گزینه ۳
این که تاس عدد (۱) و سکه هر ۳ بار «رو» آمده باشد:

$$\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{آمدن تاس}} \times \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{رو آمدن یک سکه}} \right)^3 = \frac{1}{48}$$

۸۱ گزینه ۱

$$\text{تعداد مطلوب} = \binom{7}{2} = 21 \rightarrow \text{یکی از کارت‌ها ۱ بوده و دوتای دیگر دلخواه باشند.}$$

$$\text{تعداد مطلوب} = \binom{3}{2} = 3 \rightarrow \text{یکی از کارت‌ها ۲ بوده و دوتای دیگر زوج باشند.}$$

$$p(\text{مطلوب}) = \frac{21 + 3}{\binom{8}{3}} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

۸۲ گزینه ۴ فرض کنید تعداد مهره‌های سبز x باشد.

$$p(\text{مطلوب}) = 1 - \frac{\binom{x}{2}}{\binom{5+x}{2}} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x(x-1)}{2}}{\frac{(5+x)(4+x)}{2}} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6x^2 - 6x = x^2 + 9x + 20$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 15x - 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \text{ غرق}$$

$$1 = \text{اختلاف تعداد مهره‌ها} \Rightarrow 4 = \text{تعداد مهره‌های سبز}$$

۸۳ گزینه ۲ حالت بندی را براساس عدد کوچک تر انجام می دهیم:

$$\text{تعداد کل حالت ها} = \binom{8}{2} = 28$$

۷ حالت $\rightarrow \{2, 3, \dots, 8\} \in$ عدد بزرگتر $\rightarrow$ حالتی که $\{1\}$ عدد کوچکتر باشد

۳ حالت $\rightarrow \{4, 6, 8\} \in$ عدد بزرگتر $\rightarrow$ حالتی که $\{2\}$ عدد کوچکتر باشد

۱ حالت $\rightarrow \{6\} \in$ عدد بزرگتر $\rightarrow$ حالتی که $\{3\}$ عدد کوچکتر باشد

۱ حالت $\rightarrow \{8\} \in$ عدد بزرگتر $\rightarrow$ حالتی که $\{4\}$ عدد کوچکتر باشد

اکنون توجه می کنیم که:

$$4 \leq \text{عدد کوچکتر} \rightarrow \frac{\text{عدد بزرگتر} \geq 8}{2} \times \text{عدد کوچکتر} \geq \text{عدد بزرگتر} \Rightarrow \text{دو عدد متمایز اند}$$

بنابراین همه حالت ها را بررسی کرده ایم و طبق اصل جمع داریم:

$$n(A) = 7 + 3 + 1 + 1 = 12 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

۸۴ گزینه ۳ تعداد مهره های دسته کمتر را با n و تعداد مهره های دسته بیشتر را با $2n$ نمایش می دهیم. بنابراین:

تعداد کل حالت های انتخاب ۲ مهره از کیسه برابر است با:

$$n(S) = \binom{3n}{2}$$

طبق اصل ضرب تعداد حالت های انتخاب ۲ مهره غیرهم رنگ برابر است با:

$$n(A) = \binom{n}{1} \binom{2n}{1}$$

$$\xrightarrow{\text{فرض مسئله}} \frac{n \times 2n}{\frac{(3n)(3n-1)}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4n^2}{9n^2 - 3n} = \frac{1}{2} \Rightarrow n^2 - 3n = 0$$

$$\Rightarrow n(n-3) = 0 \xrightarrow{n>0} n = 3 \Rightarrow 3n = 9$$